

## Introduction et notations

Ce texte d'analyse fonctionnelle a pour objet l'étude de quelques propriétés des séries trigonométriques ; il se conclut par une application à la résolution d'un problème de DIRICHLET par une approche variationnelle, (partie III).

Dans tout ce qui suit on note :

- $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbf{R})$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications continues du segment  $[0, \pi]$  dans  $\mathbf{R}$  ;
- $E$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des applications  $f$  de  $[0, \pi]$  dans  $\mathbf{R}$ , continues, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et vérifiant  $f(0) = f(\pi) = 0$  ;

Pour  $f$  appartenant à  $E$  on convient de désigner par  $f'$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par

- si en  $x$  de  $[0, \pi]$   $f$  est dérivable, alors  $f'(x)$  est le nombre dérivé de  $f$  en ce point ;
  - si en  $x$  de  $[0, \pi]$   $f$  n'est pas dérivable, alors  $f'(x) = 0$  ;
- $\ell_{\mathbf{R}}^2$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des suites  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  de nombres réels telles que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  converge ;
- On rappelle que, si  $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1}$  et  $\beta = (\beta_n)_{n \geq 1}$  sont deux éléments de  $\ell_{\mathbf{R}}^2$ , la série de terme général  $(\alpha_n \beta_n)_{n \geq 1}$  est absolument convergente. De plus l'application  $(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  est un produit scalaire sur  $\ell_{\mathbf{R}}^2$  et  $\ell_{\mathbf{R}}^2$  est complet pour la norme associée à ce produit scalaire ;
- pour tout entier  $n \geq 1$ , par  $e_n$  l'élément de  $E$  défini par  $e_n(x) = \sin nx$ .

### Partie I : Questions préliminaires. Exemples

#### A. Un lemme de CANTOR

Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites de nombres réels. Pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$  et pour tout entier  $n \geq 1$  on pose  $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , et on suppose que pour tout  $x$  réel la suite  $(f_n(x))$  converge vers 0. On se propose de montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont pour limite 0 en  $+\infty$ .

1. Montrer que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . En déduire que, pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ ,  $b_n \sin nx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
2. Dans cette question, on propose deux méthodes pour montrer que la suite  $(b_n)$  a pour limite 0 en  $+\infty$

##### (a) *Raisonnement par l'absurde*

On suppose que la suite  $(b_n)$  ne converge pas vers 0.

- i. Montrer qu'il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  et une sous suite  $(b_{n_k})$  de la suite  $(b_n)$  tels que  $n_1 > 0$  et que l'on ait, pour tout entier  $k$ ,  $|b_{n_k}| \geq \varepsilon$  et  $n_{k+1} \geq 3n_k$ .
- ii. Construire pour tout entier  $k$  un intervalle  $[a_k, b_k]$  de la forme  $a_k = \frac{\pi}{6} + p_k \pi$ ,  $b_k = \frac{5\pi}{6} + p_k \pi$ , avec  $p_k \in \mathbf{Z}$ , tel que si  $J_k = \frac{1}{n_k} [a_k, b_k]$  l'on ait, pour tout entier  $k$ ,  $J_{k+1} \subset J_k$ . Vérifier que  $|\sin n_k x| \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $x$  de  $J_k$ .
- iii. Établir que l'intersection  $\bigcap_{k \geq 1} J_k$  n'est pas vide, et conclure à une contradiction.

(b) *Intervention du calcul intégral*

i. Calculer  $\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2 dx$ .

ii. Conclure dans le cas où la suite  $(b_n)$  est bornée.

iii. Dans le cas général, on pose  $b'_n = \inf(1, |b_n|)$ . Vérifier que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $b'_n \sin nx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .  
Conclure.

**B. L'espace  $H$**

1. (a) Soient  $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1}$  un élément de  $\ell_{\mathbb{R}}^2$  et  $x$  un élément de  $[0, \pi]$ . Montrer que la série de terme général  $\frac{\alpha_n}{n} e_n(x)$  converge absolument (on pourra utiliser l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  pour deux nombres réels  $a$  et  $b$ ).

(b) On pose  $\theta(\alpha)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e_n(x)$ . Montrer que l'on définit ainsi une application  $\theta$  de  $\ell_{\mathbb{R}}^2$  dans  $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ .

(c) Établir que  $\theta$  est linéaire et injective.

Dans toute la suite on notera  $H$  l'image de  $\theta$ , et  $\|\cdot\|_H$  la norme définie sur  $H$ , pour  $f = \theta(\alpha)$ , par

$$\|f\|_H = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}. \text{ Vérifier que } H \text{ est complet pour cette norme.}$$

2. Établir l'inclusion  $E \subset H$ . (On pourra montrer que tout élément  $f$  de  $E$  est la restriction à  $[0, \pi]$  d'une unique fonction  $\tilde{f}$   $2\pi$ -périodique et impaire, de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et développer  $\tilde{f}$  en série de FOURIER).

3. Montrer que l'application qui à un couple  $(f, g)$  d'éléments de  $E$  associe le nombre

$$(f|g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(t)g'(t) dt$$

est un produit scalaire sur  $E$ . Vérifier que la norme associée à ce produit scalaire coïncide avec la restriction à  $E$  de  $\|\cdot\|_H$ .

Montrer que  $E$  est dense dans  $H$  pour la topologie associée à la norme  $\|\cdot\|_H$

4. Pour  $f$  dans  $H$ , on pose  $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)|$ .

(a) Prouver l'existence d'une constante  $k$  telle que l'on ait l'inégalité, valable pour tout  $f$  de  $H$  :

$$(*) \quad \forall f \in H, \quad \|f\|_{\infty} \leq k \|f\|_H.$$

(b) Pour tout élément  $a$  de  $]0, \pi[$ , on désigne par  $h_a$  l'élément de  $E$  défini en tout  $x$  par

$$h_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & \text{si } x \leq a \\ \frac{a}{\pi - a} x & \text{si } x > a \end{cases}. \text{ En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au produit scalaire } (f|h_a), \text{ pour } f \text{ dans } E, \text{ montrer que la plus petite valeur de } k \text{ telle que l'on ait } (*) \text{ est } \pi/\sqrt{8}.$$

5. On se propose de démontrer que si  $F$  est une application de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 0$ , et si  $f$  est un élément de  $H$ , alors  $F \circ f$  appartient à  $H$ .

Soient  $f$  un élément de  $H$  et  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $E$  convergeant vers  $f$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_H$ . On pose  $g_n = F \circ f_n$ .

(a) Vérifier que la suite  $(\|f_n\|_\infty)$  est bornée.

On note  $A$  un réel vérifiant  $\|f_n\|_\infty \leq A$  pour tout  $n$ , puis  $M_1 = \sup_{|t| \leq A} |F'(t)|$  et  $M_2 = \sup_{|t| \leq A} |F''(t)|$ .

(b) Établir que, pour tous  $p, q$  dans  $\mathbb{N}$ , on a l'inégalité :

$$\|g_p - g_q\|_H \leq \left( \frac{\pi}{\sqrt{8}} M_2 \|f_p\|_H + M_1 \right) \|f_p - f_q\|_H$$

(c) Conclure.

(d) En déduire que  $H$  est une algèbre, i.e. que le produit  $fg$  de deux éléments  $f$  et  $g$  de  $H$  est un élément de  $H$ . (On pourra utiliser la relation  $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$ ).

## Partie II : Pseudo-dérivée seconde au sens de SCHWARZ

Si  $f$  est une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $f$  admet au point  $x$  une dérivée seconde au sens de SCHWARZ si, et seulement si,  $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$  existe ; dans ce cas la limite est notée  $f''(x)$ .

1. Montrer que si  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $f''(x)$  existe en tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , et en donner la valeur.
2. Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  possédant en tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  une pseudo-dérivée seconde au sens de SCHWARZ nulle.

(a) Soient  $a$  et  $b$  des réels tels que  $a < b$ ,  $\varepsilon$  un réel strictement positif. On pose

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - \varepsilon (x - a)(b - x)$$

Vérifier que la fonction  $\varphi$  est continue et que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Calculer  $\varphi''(x)$ .

Montrer que  $\varphi$  ne peut avoir de maximum strictement positif sur  $[a, b]$ .

(b) En déduire que  $f$  est affine.

3. Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites de réels tels que la série de fonctions de terme général  $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ . On pose alors

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

(a) Justifier l'existence de  $F$  sur  $\mathbb{R}$  et prouver sa continuité.

(b) Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$  et  $h > 0$  on pose

$$u(0) = 1, \quad u(x) = \frac{4}{x^2} \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta(x, h) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

Vérifier la relation

$$\Delta(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) u(nh).$$

(c) Si l'on pose  $S_0(x) = 0$  et  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$  pour  $n \geq 1$ , justifier l'égalité

$$\Delta(x, h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(x) - f(x)] [u(nh) - u((n+1)h)].$$

- (d) i. En remarquant que  $u((n+1)h) - u(nh) = \int_{nh}^{(n+1)h} u'(x) dx$ , déduire de ce qui précède que, pour tout réel  $x$ ,  $F^{(n)}(x)$  existe et vaut  $f(x)$ .
- ii. Montrer que l'application qui au réel  $x$  associe  $\int_0^x (x-t)f(t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et calculer sa dérivée seconde.
- iii. Prouver finalement l'existence de réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout réel  $x$  l'on ait

$$F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x-t)f(t) dt.$$

- (e) En utilisant ce qui précède, établir que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont les coefficients de FOURIER de  $f$ , i.e. que pour tout  $n$  :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

### Partie III : Application à un problème variationnel

On désigne par  $E_0$  le sous-espace vectoriel de  $E$  des applications  $v$  de  $[0, \pi]$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifiant  $v(0) = v(\pi) = 0$ .

On considère une application continue  $f$  de  $[0, \pi]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$ ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

où  $(b_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombres réels.

1. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , la série de terme général  $(b_n \sin nx)_{n \geq 1}$  est convergente, et que sa somme coïncide avec l'unique application  $\tilde{f}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , impaire,  $2\pi$ -périodique et prolongeant  $f$ . Justifier que, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

#### 2. Le problème variationnel

On désigne par  $J : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in E_0, \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [(v'(x))^2 + (v(x))^2] dx - \int_0^{\pi} f(x)v(x) dx.$$

et on s'intéresse au problème de minimisation suivant :

$$(P) \quad \text{Trouver } u \in E_0 \text{ tel que, pour tout } v \in E_0, J(u) \leq J(v).$$

Établir, pour tout  $t$  de  $\mathbb{R}$  et tous  $u, v$  de  $E_0$ , l'identité suivante :

$$J((1-t)u + tv) + \frac{t(1-t)}{2} \int_0^{\pi} [(v'(x) - u'(x))^2 + (v(x) - u(x))^2] dx = (1-t)J(u) + tJ(v).$$

#### 3. Unicité de la solution du problème (P)

Déduire de la question précédente que si  $u_1$  et  $u_2$  sont solutions de (P), alors :

$$\int_0^{\pi} [(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + (u_1(x) - u_2(x))^2] dx = 0$$

et, par suite,  $u_1 = u_2$ .

#### 4. Caractérisation des solutions de (P)

(a) Montrer que pour tous  $u, v$  de  $E_0$ , l'on a, pour tout réel  $t$  :

$$J(u + tv) = J(u) + t \int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x) - f(x)v(x)) dx + \frac{t^2}{2} \int_0^\pi (v'^2(x) + v^2(x)) dx.$$

(b) En déduire que, pour  $u$  dans  $E_0$ ,  $u$  est solution de (P) si, et seulement si,  $u$  vérifie :

$$(P') \quad \forall v \in E_0, \quad \int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x)) dx = \int_0^\pi f(x)v(x) dx.$$

#### 5. Existence d'une solution de (P)

(a) Soit  $u$  une solution de (P). Déduire de la question précédente que nécessairement, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin nx dx = \frac{b_n}{n^2 + 1}.$$

(b) Pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ , on pose  $\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2 + 1} \sin nx$ . En écrivant

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2 + 1)} \sin nx$$

montrer que  $\tilde{u}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbf{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et vérifie :

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = \tilde{f} \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

(c) En déduire que la restriction  $u$  de  $\tilde{u}$  à  $[0, \pi]$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, \pi]$  et est solution, sur cet intervalle, du problème de DIRICHLET :

$$(D) \quad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(d) Montrer que  $u$  est solution de (P'), et donc de (P).

---